2025（令和 7）年度 福岡女子大学 一般選抜 前期日程 個別学力検査 解答例

数学（国際教養学科）

1 (1) $11001011_{(2)} = 203_{(10)} = \mathrm{CB}_{(16)}$

$2345_{(8)} = 1253_{(10)} = 4\mathrm{E}5_{(16)}$

(2) $145_{(16)} = 101000101_{(2)}$

$\mathrm{B}2_{(16)} = 10110010_{(2)}$

(3) 十進法で表現して 3 桁となる自然数 N の範囲は

$$10^2 \leqq N < 10^3$$

であり，十六進法で表現して 3 桁となる自然数 N の範囲は

$$16^2 \leqq N < 16^3$$

である．これらを同時に満たす N の範囲は

$$16^2 \leqq N < 10^3$$

となるので，これを満たす自然数 N の個数は

$$10^3 - 16^2 = 744\ (\text{個})$$

となる．

(4) $1000111001010010_{(2)} = 8\mathrm{E}52_{(16)}$

$1000110011111011_{(2)} = 8\mathrm{CFB}_{(16)}$

となるので，該当する漢字は「山口」となる．

2 (1) それぞれ以下の通りとなる．

$$\log_{10} 20 = \log_{10}(2 \cdot 10) = \log_{10} 2 + 1 \fallingdotseq 1.301$$

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0.6990}{0.3010} \fallingdotseq 2.322$$

(2) $\log_{10} 20^{24}$ を計算すると

$$\log_{10} 20^{24} = 24 \log_{10} 20 = 24 \times 1.301 = 31.224$$

となる．よって，

$$31 < \log_{10} 20^{24} < 32$$
$$10^{31} < 20^{24} < 10^{32}$$

となる．従って，20^{24} の桁数は 32 桁となる．

(3) 最高位の数が a である自然数 N について，$\log_{10} N$ の小数部分を q とするとき，

$$\log_{10} a \leqq q < \log_{10}(a+1)$$

が成り立つ．(2) の結果から，$\log_{10} 20^{24}$ の小数部分は 0.224 であるので，

$$\log_{10} 1 < 0.224 < \log_{10} 2$$

が成り立つことが分かる．従って，20^{24} の最高位の数字は 1 である．

(4) $\log_2 20^{24}$ を計算すると (1) の結果より

$$\log_2 20^{24} = 24 \log_2 20 = 24 \times 2.322 = 103.728$$

となる．よって

$$103 \leqq \log_2 20^{24} < 104$$

が成り立つ．従って，20^{24} を 2 進数で表した時の桁数は 104 桁である．

$\boxed{3}$ (1) 問題文より，以下が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(2) 問題文より，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{AF}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

(3) 前問より，以下が成り立つ．

$$1-s = \frac{2}{3}t, \quad \frac{3}{4}s = 1-t$$

これらから，$3-3s=2t$，$3s=4-4t$ となる．
すると，$3-4+4t=2t$ となり，$t=\frac{1}{2}$ となる．
よって，$s = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ が得られる．
以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ については，m, n を用いて以下のように表せる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= m\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= m(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= \frac{1}{3}m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + n(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \\ &= (1-n)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

これらから，$\frac{1}{3}m = 1-n$，$\frac{1}{2}m = n$ となる．
すると，$m = 2n$ となり，$\frac{2}{3}n = 1-n$ から $n = \frac{3}{5}$ が得られる．
つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので，BD：DC は 3：2 となる．

(5) 以上の結果から，

$$\begin{aligned}x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{BP}} + z\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= x(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + y(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + z(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= x(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + y(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + z(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z) + \overrightarrow{\mathrm{AC}}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)\end{aligned}$$

これが $\overrightarrow{0}$ となるので，$x - 2y + z = 0$，$x + y - z = 0$ となる．すると，$y = 2x$，$z = x + y = x + 2x = 3x$ が得られる．以上から，$x : y : z = 1 : 2 : 3$ となる．

$\boxed{4}$ (1) 表の出た回数が 3 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶような結果は 8 通りである．一方，表の出た回数が 3 回となるような結果は全部で

$${}_9\mathrm{C}_3 = 84 \text{（通り）}$$

であるから，A が空集合となるのは

$$84 - 8 = 76 \text{（通り）}$$

である．

(2) 表の出た回数が 4 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶのは，3 つの数で一直線に並んで，残りの 1 つの数字は残った 6 個のマス目のうち任意の数字でよいので，

$$8 \times 6 = 48 \text{（通り）}$$

となる．一方，表の出た回数が 4 回となるような結果は全部で

$${}_9\mathrm{C}_4 = 126 \text{（通り）}$$

であるから，A が空集合となるのは

$$126 - 48 = 78 \text{（通り）}$$

である．

(3) 表の出た回数が 5 回であるとき，塗りつぶしたマス目が 2 か所で一直線に並ぶのは，集合 A の 2 つの要素が C と R，C と N，R と N，N と N の組み合わせとなる場合なので，

$$3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = 22 \text{（通り）}$$

となる．

(4) 表の出た回数が 5 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶのは，3 つの数で一直線に並んで，残りの 2 つの数字は残った 6 個のマス目のうちの 2 個の数字となる．この 2 つの数字の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 15$ 通りあり，一直線の選び方は 8 通りであるので，これらの積を取ると

$$15 \times 8 = 120$$

となるが，これらの中には，A の要素数が 2 のものが重複して数えられている．よって，

$$120 - 2 \times 22 = 76 \text{（通り）}$$

となる．

(5) 表が出た回数が 6 回で，A が空集合となるのは，斜めのいずれかが塗りつぶされない場合なので，2 通りである．

(6) 表の出た回数が 5 回であるという事象を B，そうでない事象を C とする．A が空集合であるという事象を E とする．コインを 9 回投げて表と裏が出るパターンの総数は 2^9 であるから，

$$P(B) = \frac{{}_9\mathrm{C}_5}{2^9} = \frac{126}{2^9}$$
$$P(C) = 1 - P(B) = \frac{2^9 - 126}{2^9}$$

となる．一方，表の出た回数が 5 回であるときに A が空集合となる条件付確率は，${}_9\mathrm{C}_5 = 126$ および，(3) と (4) の結果から

$$P_B(E) = \frac{(126 - 76 - 22)/2^9}{126/2^9} = \frac{28}{126}$$

となる．表の出た回数が 5 回でないときに A が空集合になる条件付確率は，表の出た回数が 2 回以下の場合は必ず A は空集合になり，7 回以上の場合は必ず空集合にならないこと，および (1) と (2) と (5) の結果より，

$$P_C(E) = \frac{{}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + 76 + 78 + 2}{2^9 - 126} = \frac{202}{2^9 - 126}$$

となる．以上のことから，A が空集合であったことを知らされた場合，表の出た回数が 5 回であった確率は,

$$\begin{aligned} P_E(B) &= \frac{P(B)P_B(E)}{P(B)P_B(E)+P(C)P_C(E)} \\ &= \frac{28/2^9}{28/2^9+202/2^9} = \frac{28}{230} = \frac{14}{115} \end{aligned}$$

となる．

$\boxed{5}$ (1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = 2x + q$$

であるので，$f(x)$ の $x=1$ における微分係数は

$$f'(1) = 2 + q$$

となる．ℓ が $x=1$ において曲線 C と接するので,

$$2 + q = a$$

より,

$$q = a - 2$$

となる．一方，曲線 C は点 $(1, a)$ を通るので,

$$f(1) = 1 + (a-2) + r = a - 1 - r$$

より,

$$\begin{aligned} a - 1 + r &= a \\ r &= 1 \end{aligned}$$

となる．よって，$f(x)$ は次のように表すことができる．

$$f(x) = x^2 + (a-2)x + 1$$

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とするとき，曲線 C は x 軸と共有点を持たないので,

$$D = (a-2)^2 - 4 < 0$$

が成り立つ．従って,

$$\begin{aligned} (a-2)^2 - 4 &< 0 \\ a^2 - 4a &< 0 \\ a(a-4) &< 0 \\ 0 < a &< 4 \end{aligned}$$

となる．

(3) 直線 m と曲線 C が交点を持つとすると，

$$\begin{aligned} x^2+(a-2)x+1&=kx \\ x^2+(a-2-k)x+1&=0 \end{aligned}$$

となり，さらにそれらは接するのでこの方程式の判別式の値は 0 となるから，

$$\begin{aligned} (a-2-k)^2-4&=0 \\ (a-2-k+2)(a-2-k-2)&=0 \\ k&=a, \quad a-4 \end{aligned}$$

直線 m は直線 ℓ とは異なるので，$k=a-4$ となる．また，直線 m と曲線 C の接点の x 座標は

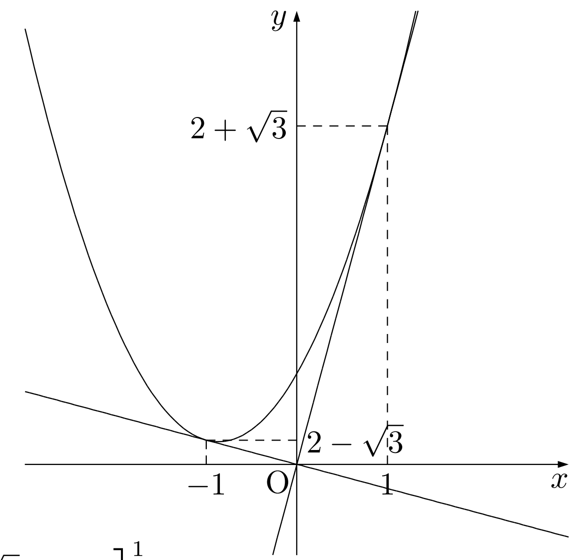
$$\begin{aligned} x^2+(a-2)x+1&=(a-4)x \\ x^2+2x+1&=0 \\ (x+1)^2&=0 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

となる．

(4) 直線 ℓ と直線 m が直交するので，

$$\begin{aligned} a(a-4)&=-1 \\ a^2-4a+1&=0 \\ a&=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる．$q=a-2>0$ より，$a=2+\sqrt{3}$ のとき，グラフの概形は右のようになる．



(5) $a=2+\sqrt{3}$ のとき，曲線 C と $x=-1$，$x=1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は，

$$\begin{aligned} S_1&=\int_{-1}^{1}\left\{x^2+\sqrt{3}x+1\right\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1} \\ &=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) \\ &=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

直線 m と $x=-1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_2 は，

$$S_2=1\times(4-(2+\sqrt{3}))\times\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

直線 ℓ と $x=1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_3 は，

$$S_3=1\times(2+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$$

よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 - S_2 - S_3 = \frac{8}{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

となる.

(6) 曲線 C と $x=-1$，$x=1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_1 は,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-1}^{1} \left\{x^2 + (a-2)x + 1\right\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{a-2}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{a-2}{2} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

直線 m と $x=-1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_2 は,

$$
S_2 = 1 \times (4-a) \times \frac{1}{2} = \frac{4-a}{2}
$$

直線 ℓ と $x=1$，x 軸で囲まれた部分の面積 S_3 は,

$$
S_3 = 1 \times a \times \frac{1}{2}
$$

よって，求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 - S_2 - S_3 = \frac{8}{3} - \frac{4-a}{2} - \frac{a}{2} \\
&= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

となる.